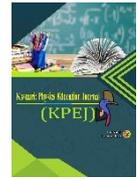




Kasuari: Physics Education Journal (KPEJ) Universitas Papua

Web: <http://jurnal.unipa.ac.id/index.php/kpej>



Method for Accelerating Equilibrium in Perfectly Damped Brownian Motion with Harmonic Potential

Jodi Aszhar*, Iwan Setiawan, & Rosane Medriati

Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Bengkulu

*Corresponding author: jodiaszhar1309@gmail.com

Abstract: Technological advances nowadays, making human beings able to do things easier and shorter. In this study, perfectly damped Brownian motion with a harmonic potential is considered, where previously it was moving randomly, requiring a long time to return to an equilibrium state. This research aims to determine the additional potential of each initial potential in the form of harmonic potentials with various powers. The method used is the Fast Forward method developed by Nakamura and Masuda. This research obtained results. First, if the initial potential of the system is $(U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4)$ additional potential is obtained $U_1 = \frac{\lambda \dot{y}}{8\lambda(t)} x^2$ and if the initial potential $(U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6)$ hence the additional potential $U_1 = \frac{\lambda \dot{y}}{12\lambda(t)} x^2$. The equation used in this research is the Fokker-Planck equation. It was concluded that this research obtained additional potential for perfectly damped Brownian motion so that the time needed to reach the equilibrium state would be shorter.

Keywords: Brown motion, fast forward, and theoretical physics

Metode untuk Mempercepat Kesetimbangan pada Gerak Brown Tereadam Sempurna (*overdamped*) dengan Potensial Harmonik

Abstrak: Kemajuan teknologi sekarang, membuat manusia dapat melakukan sesuatu dengan lebih mudah dan singkat. Pada penelitian ini ditinjau gerak Brown teredam sempurna dengan potensial harmonik, dimana yang sebelumnya bergerak acak, membutuhkan waktu yang lama untuk kembali seimbang. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui potensial tambahan setiap potensial awal yang berbentuk potensial harmonik dengan pangkat yang beragam. Metode yang digunakan merupakan metode *Fast Forward* yang dikembangkan oleh Nakamura dan Masuda. Penelitian ini didapatkan hasil berupa pertama, apabila potensial awal sistem adalah $(U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4)$ maka potensial tambahan $U_1 = \frac{\lambda \dot{y}}{8\lambda(t)} x^2$ dan apabila potensial awal $(U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6)$ maka potensial tambahannya $U_1 = \frac{\lambda \dot{y}}{12\lambda(t)} x^2$. Persamaan yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan Fokker-Planck. Disimpulkan bahwa penelitian ini mendapatkan potensial tambahan gerak Brown teredam sempurna agar waktu yang dibutuhkan untuk mencapai keadaan setimbang akan lebih singkat.

Kata kunci: *Fast forward*, Fisika teori, dan gerak Brown

PENDAHULUAN

Melalui kemajuan teknologi saat ini, tentunya manusia sekarang dapat melakukan banyak hal dengan lebih mudah, seperti membuat produk yang efisien dan singkat. Salah satu cara mempersingkat waktu ini adalah dengan cara memanipulasi dan mengoptimalkan waktu pengerjaan dan perancangan produk (Hutagalung, 2023). Kegiatan mempersingkat waktu tidak hanya dilakukan dalam dunia pekerjaan, tetapi juga

dalam bidang mikroskopik (Setiawan et al., 2017). Dalam dunia mikroskopik, salah satu objek yang ditinjau adalah konsep stokastik (Yang & Qian, 2020).

Proses stokastik berkaitan dengan dinamika gerak benda yang terdistribusi dalam sebuah medium. Fisika bisa dinyatakan sebagai upaya merealisasikan konsep matematis ke konstektual (Apriza, 2019). Menurut (Apriana & Rosyid, 2018) Proses stokastik adalah variabel acak yang kejadiannya tidak dapat diprediksi secara pasti dan dilabeli dengan waktu. Sistem dinamika stokastik atau differensial stokastik dapat diterapkan pada sistem yang bergerak acak, khususnya sistem non-relativistik seperti gerak Brown (Ainayah et al., 2023 ; Seifert, 2012). Gerak Brown adalah gerakan acak partikel mikroskopis yang dilarutkan dalam fluida. Dua hasil dari penelitian Robert Brown tentang gerakan Brown adalah bahwa lintasan partikel dalam fluida tidak teratur dan bahwa hasil interaksi dua partikel yang berbeda tidak berdampak pada gerakan (Romadani & Rosyid, 2022). Kemudian Gouy menambahkan beberapa hal yaitu, semakin cepat gerakannya semakin kecil partikelnya, gerakan dipengaruhi oleh densitas dan komposisi partikel, fluida dengan viskositas kecil lebih mempercepat gerak Brown, suhu yang tinggi mempercepat gerakannya, dan gerakan partikel tidak pernah berhenti . Gerak Brown dapat pada partikel pada partikel nano yang berada dalam fluida tertentu yang dihambat oleh viskositas fluida dan gaya stokastik. Hal ini disebabkan oleh tumbukan molekul yang bergerak acak di dalam fluida (Khadem et al., 2022). Salah satu contoh yang dilakukan yaitu dengan menggunakan metode *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) (Martínez et al., 2016). Dia melakukan eksperimen dengan partikel Brown dalam perangkat mikro dan nano yang terperangkap dalam potensial optik yang dapat dikontrol dengan waktu. Eksperimen dimulai dengan kasus perubahan yang sangat lama selama partikel tetap dalam posisi setimbangan (*equilibrium*) (Elisa et al., 2023; Martínez et al., 2016).

Penelitian ini dilanjutkan oleh Gouy (Najmudin, 2018) Dari hasil penelitian Gouy didapatkan hasil yang lebih rinci yaitu gerakan berbanding terbalik dengan ukuran partikel, gerakan partikel dalam fluida dipengaruhi oleh densitas dan komposisi partikel, viskositas fluida yang kecil dan suhu yang tinggi akan lebih mempercepat gerak Brown, dan gerakan partikel tidak pernah berhenti. Disebabkan oleh tumbukan molekul yang bergerak acak di dalam fluida, partikel nano dalam fluida tertentu mengalami gerakan Brown yang dihambat oleh viskositas dan gaya stokastik (Khadem et al., 2022). Keadaan partikel pada gerak Brown akan mudah ditinjau jika sistem ada dalam keadaan setimbang. Kesetimbangan sesuatu dapat berubah dengan gangguan tertentu. Oleh karena itu perlu upaya untuk mengembalikan sesuatu tersebut ke keadaan setimbang lagi. Untuk kembali ke keadaan setimbang membutuhkan waktu yang lama (Martínez et al., 2016). Untuk mempercepat gerak menuju kesetimbangan pada partikel Brown ini dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Fast Forward* (Nakamura et al., 2020).

Metode *Fast Forward* dikembangkan oleh Nakamura dan Masuda pada sistem relatif yang partikelnya kecil (Benggadinda & Setiawan, 2021). Metode yang digunakan yaitu metode *Fast Forward* yang merupakan metode untuk mendapatkan produk dengan jangka waktu singkat seperti proyeksi film secara instan di layar (Hutagalung, 2023). Dalam mesin carnot, tunneling, sistem banyak benda, dan sistem diskrit, metode *Fast Forward* digunakan dalam penelitian (Elisa et al.,) dan Dirac Dinamis (Sugihakim et al., 2021). Pada penelitian ini metode *Fast Forward* diterapkan untuk gerak Brown yang teredam sempurna/*overdamped*, dengan potensial berupa potensial harmonik (Takahashi, 2014).

Peredaman sempurna/*overdamped* adalah suatu partikel yang berhenti bergerak sebelum mencapai titik kesetimbangannya. Kali ini terjadi karena adanya suatu redaman

yang melewati sistem (Pradana, 2018). *Overdamped* juga biasa disebut kelebihan redaman. Dikarenakan redaman yang bertambah pada sistem sampai melewati titik kritisnya (Ainayah et al., 2023). Terdapat juga system gerak Brown *underdamped* yaitu sistem menuju keadaan beresilasi, di mana amplitudonya secara bertahap menurun dan akhirnya mencapai nol (Elisa et al.,) dan keadaan *underdamped* ini terjadi ketika suatu benda terus beresilasi sampai akhirnya berhenti karena redaman yang tidak terlalu besar (Pradana, 2018).

Gerak Brown yang teredam sempurna dapat digambarkan melalui persamaan Fokker-Planck. Persamaan Fokker-Planck dipublikasikan pertama kali oleh Fokker dan Planck. Persamaan ini digunakan oleh sistem kesetimbangan partikel (Ainayah et al., 2023). Persamaan Fokker-Planck didefinisikan sebagai bentuk yang digunakan dari persamaan differensial parsial untuk mengilustrasikan gerak Brown di dalam suatu fluida (Romadani & Rosyid, 2022). Bertabraknya partikel yang berevolusi menyebabkan pergeseran dalam ruang kecepatan (Palupi, 2010). Dalam ilmu pengetahuan modern, persamaan Fokker-Planck digunakan untuk memodelkan berbagai masalah gerak benda. Mereka tidak hanya digunakan dalam fisika, tetapi juga di bidang lain seperti matematika, kimia, biologi, dan radioteknik (Tsekov, 2010). Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan yang digunakan untuk memperoleh teknik yang menggunakan energi tambahan pada dinamika stokastik (Frank, 2005).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \quad (1)$$

Keterangan:

U : Variabel yang menyatakan potensial sistem

ρ : Variabel yang menentukan penyebaran partikel

γ : Konstanta Gesekan

β : Konstanta Termodinamika

x : Parameter yang menunjukkan lokasi partikel

t : Waktu (Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui potensial tambahan setiap potensial awal yang berbentuk potensial harmonik dengan pangkat yang beragam) (Ainayah et al., 2023)

Pada penelitian ini ditinjau gerak Brown teredam sempurna dengan potensial harmonik, dimana yang sebelumnya bergerak acak, membutuhkan waktu yang lama untuk kembali seimbang. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui potensial tambahan setiap potensial awal yang berbentuk potensial harmonik dengan pangkat yang beragam.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini berfokus pada pengembangan teori fisika secara kuantitatif. Studi literatur tentang pengembangan metode *Fast Forward* oleh Masuda dan Nakamura digunakan dalam penelitian ini (Nakamura et al., 2020). Penelitian ini dilakukan di program studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Bengkulu. Riset ini dimulai awal bulan Agustus hingga bulan November 2023. Penelitian ini terdiri dari lima tahap, yaitu:

1. Pengumpulan literatur

Pada tahap awal telah dilakukan pengumpulan berbagai literatur terkait metode *Fast Forward* sebagai bahan untuk kajian teori. Literatur yang diambil berupa buku, jurnal, dan media elektronik yang sesuai dengan penelitian yang dapat mendukung penelitian ini.

2. Kajian literatur
Pada tahap ini, literatur yang sudah dikumpulkan dikaji dengan seksama hingga peneliti mampu menyimpulkan literatur yang telah dikaji. Tahap ini sangat penting untuk memudahkan peneliti saat mengembangkan teori menggunakan metode *Fast Forward*.
3. Pengembangan teori
Fokus utama yang telah ditentukan pada tahap sebelumnya dikembangkan menggunakan metode *Fast Forward* dengan bantuan persamaan Fokker-Planck.
4. Hasil
Pada tahap ini, dilakukan perhitungan secara sistematis menggunakan metode *Fast Forward* dengan bantuan persamaan Fokker-Planck.
5. Kesimpulan
Hasil perhitungan yang telah didapatkan pada tahap sebelumnya dirangkum dalam bagian kesimpulan dengan tujuan untuk menjawab masalah yang telah ditentukan pada penelitian ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Meninjau gerak Brown pada kasus teredam sempurna digunakan persamaan Fokker-Planck. Dua bagian Persamaan Fokker-Planck menjelaskan proses difusi partikel dalam ruang kecepatan tiga dimensi. Gesekan yang melambatkan gerak partikel menuju kecepatan nol dalam ruang fasa adalah bagian pertama (Palupi, 2010).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \quad (2)$$

Potensial harmonik dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$

Jika ditinjau distribusi partikel pada keadaan setimbang atau $\rho(x, \lambda)$ tidak bergantung waktu ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) dan potensial awalnya $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$ dengan λ sebagai parameter kontrol, maka didapatkan persamaan (3).

$$0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (2\lambda x^3 \rho) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (3)$$

dan

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} 2\lambda x^3 \rho \quad (4)$$

Jika kedua suku pada persamaan (4) di integralkan, didapatkan distribusi partikel $\rho(x, \lambda)$ sebagaimana persamaan (5)

$$\rho = C e^{\frac{-\beta \lambda x^4}{2}} \quad (5)$$

Proses normalisasi berikut dapat digunakan untuk mendapatkan nilai konstanta C

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^2 dx = 1 \quad (6)$$

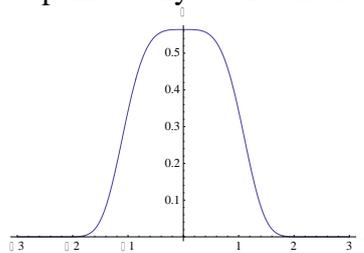
Substitusi hasil persamaan (5) ke persamaan (6), maka nilai konstanta C, yaitu:

$$C = \sqrt{\frac{\beta\lambda}{\pi}} \quad (7)$$

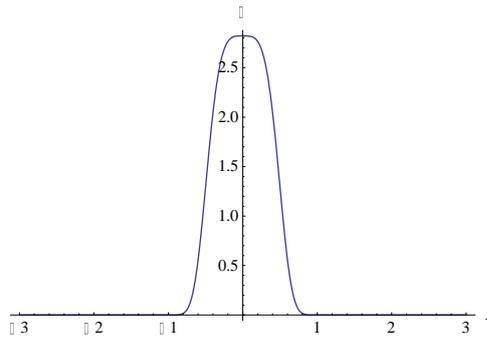
Setelah nilai konstanta c disubstitusi, distribusi partikel pada keadaan setimbang dapat dituliskan menjadi persamaan (8).

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\beta\lambda x^4}{2}} \quad (8)$$

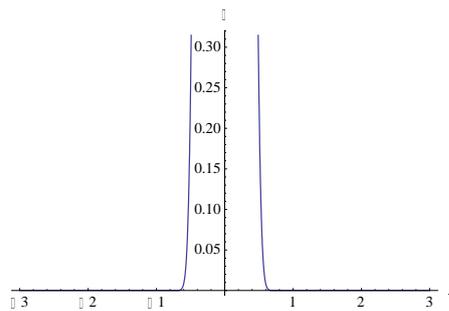
Distribusi partikel untuk potensial pangkat 4 bisa dilihat pada Gambar 1, 2 dan 3. Dimana gambar tersebut pembedanya terletak di λ dan β .



Gambar 1. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$
 $\lambda = 1, \beta = 1$



Gambar 2. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$
 $\lambda = 5, \beta = 5$

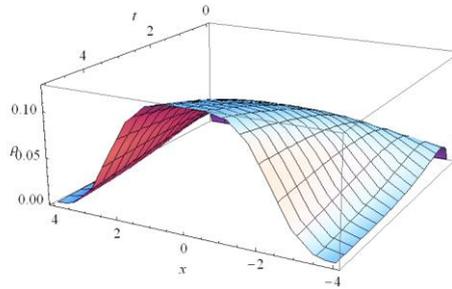


Gambar 3. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$
 $\lambda = 10, \beta = 10$

Selain itu, jika sistem diberi gangguan oleh parameter kontrol λ ditinjau menjadi parameter kontrol yang bergantung waktu (t), maka Persamaan (8) menjadi

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta\lambda(t)}{\pi}} e^{-\frac{\beta\lambda(t)x^4}{2}} \quad (9)$$

Distribusi partikel untuk potensial pangkat 4 bisa dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$
 $\lambda = A + \mu t$, $A = 0$, $\beta = 1$ dan $\mu = 0.01$

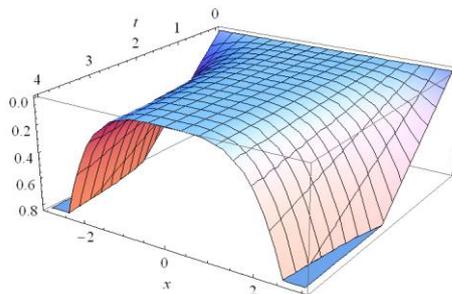
Agar $\rho(t)$ pada persamaan (9) tetap memenuhi persamaan Fokker-Planck pada persamaan (1). Maka potensial system dituliskan $U = U_0 + U_1$ sehingga menjadi

$$U = \frac{1}{2} \lambda(t)x^4 + U_1 \quad (10)$$

U_1 merupakan besar potensial tambahan yang harus ditambahkan pada sistem agar distribusi partikel bisa kembali ke keadaan setimbang dalam waktu yang singkat dan substitusikan $\rho(x, \lambda(t))$ pada persamaan (9) dan U pada persamaan (10) ke persamaan Fokker-Planck pada persamaan (1) didapatkan persamaan:

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda(t))}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (11)$$

Potensial awal dengan U_0 pangkat 4 bisa dilihat di gambar 5. Dimana untuk U_0 pangkat 4 $= \frac{1}{2} \lambda x^4$ yang akan disubstitusikan nantinya dengan persamaan ke 10 ke persamaan 11.



Gambar 5. untuk U_0 pangkat 4 $= \frac{1}{2} \lambda x^4$
 $\lambda = A + \mu t$, $A = 0$, $\mu = 0.01$ dan $u = \frac{1}{2} \lambda x^4$

Jika disubstitusikan persamaan (10) ke persamaan (11) maka didapatkan hasil yaitu:

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda(t))}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left((2 \lambda(t) x^3 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x}) \right) \quad (12)$$

Penyelesaian persamaan (12) yang mana hasil dari persamaan itu turunannya dikalikan dengan $\dot{\lambda}$.

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda(t))}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\lambda(t)} - \frac{\beta x^4}{2} \right) \rho \cdot \dot{\lambda} \quad (13)$$

selanjutnya, menyelesaikan persamaan di ruas kanan pada persamaan (11) sehingga didapatkan hasil yang telah dimasukan dengan $\dot{\lambda}$ menjadi:

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2\lambda(t) x^3 + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (14)$$

Kemudian mensubstitusikan hasil yang diperoleh pada persamaan (13) dan (14) ke persamaan (11) dengan mengotak atik suku kiri dan kanan sehingga mendapatkan hasil persamaan (15).

$$U_1 = \frac{\dot{\lambda} \gamma}{8\lambda(t)} \cdot X^2 \quad (15)$$

dengan memisalkan $U_1 = Ax^2$ didapatkan U_1 untuk orde pangkat 4 yaitu persamaan (16).

$$U_1 = \frac{\dot{\lambda} \gamma}{8\lambda(t)} \cdot X^2 \quad (16)$$

Potensial harmonik dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$

Hal ini juga dilakukan dengan potensial awal yang berbentuk potensial harmonik dengan nilai $\frac{1}{2} \lambda x^6$ dengan cara yang sama. Jika ditinjau distribusi partikel pada keadaan equilibrium atau $\rho(x, \lambda)$ tidak bergantung waktu ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) dan potensial awalnya $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$ dengan λ sebagai parameter kontrol, maka didapatkan:

$$0 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (3\lambda x^5 \rho) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (17)$$

dan

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} 3\lambda x^5 \rho \quad (18)$$

Jika kedua suku pada persamaan (18) diintegrasikan, maka didapatkan distribusi partikel $\rho(x, \lambda)$ sebagai berikut:

$$\rho = C e^{\frac{-\beta\lambda x^6}{2}} \tag{19}$$

Proses normalisasi berikut dapat digunakan untuk mendapatkan nilai konstanta C dengan nilai konstanta c tersebut dilakukan substitusi sehingga diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho|^2 dx = 1 \tag{20}$$

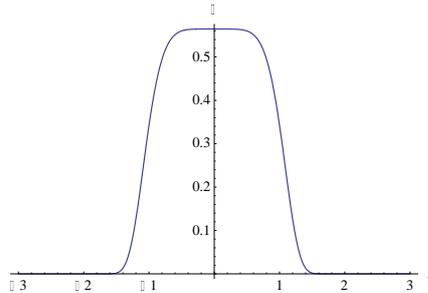
Mensubstitusikan lagi hasil dari persamaan (19) ke persamaan (20), didapatkan nilai dari konstanta C, berupa:

$$C = \sqrt{\frac{\beta\lambda}{\pi}} \tag{21}$$

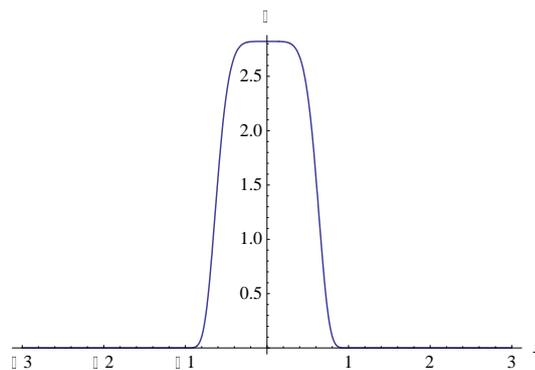
Setelah itu, dilakukan substitusi nilai konstanta c, maka distribusi partikel pada keadaan seimbang dan dilakukan substitusi kembali ke persamaan eksponensial:

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta\lambda}{\pi}} e^{\frac{-\beta\lambda x^6}{2}} \tag{22}$$

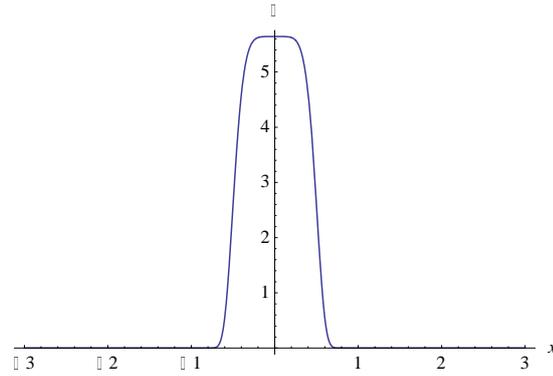
Distribusi partikel untuk potensial pangkat 6 bisa dilihat pada Gambar 6, 7 dan 8 yang divariasikan berdasarkan λ dan β .



Gambar 6. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$
 $\lambda = 1, \beta = 1$



Gambar 7. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$
 $\lambda = 5, \beta = 5$

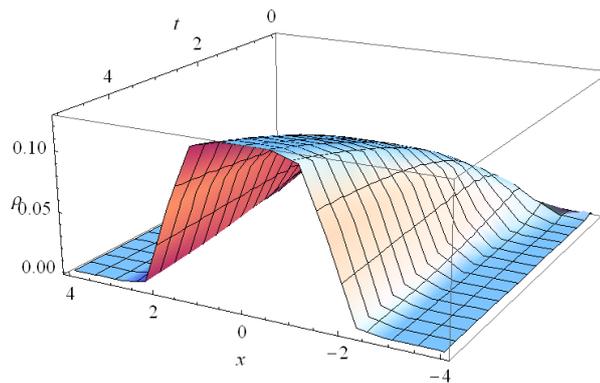


Gambar 8. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$
 $\lambda = 10, \beta = 10$

Setelah itu, jika sistem diberi gangguan dengan parameter control λ ditinjau menjadi parameter control yang bergantung waktu (t), dengan sebelumnya belum bergantung waktu, menjadi bergantung waktu sehingga persamaan (22) menjadi:

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta\lambda(t)}{\pi}} e^{-\frac{\beta\lambda(t)x^6}{2}} \quad (23)$$

Distribusi partikel untuk potensial pangkat 6 bisa dilihat di gambar 9 untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$.



Gambar 9. Untuk ρ dengan $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$
 $\lambda = A + \mu t, A = 0, \beta = 1$ dan $\mu = 0.01$

Agar $\rho(t)$ pada persamaan (23) tetap memenuhi persamaan Fokker-Planck pada persamaan (1), maka potensial system dituliskan $U = U_0 + U_1$ sehingga:

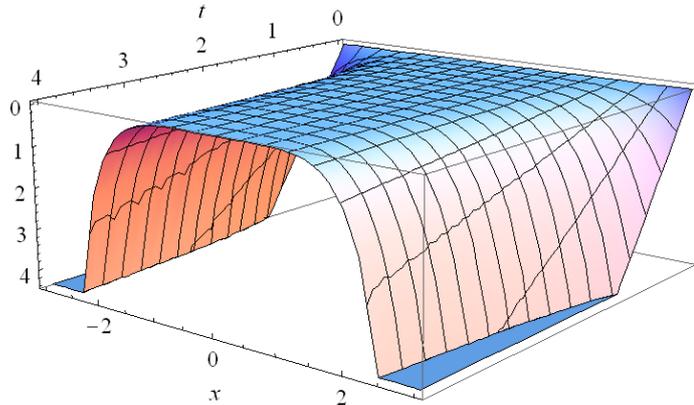
$$U = \frac{1}{2} \lambda(t)x^6 + U_1 \quad (24)$$

U_1 merupakan besar potensial tambahan yang harus ditambahkan pada sistem agar distribusi partikel bisa kembali ke keadaan setimbang dalam waktu yang singkat dengan

$\rho(x, \lambda(t))$ pada persamaan (23) dan U pada persamaan (24) ke persamaan Fokker-Planck pada persamaan (1) dituliskan menjadi:

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda(t))}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (25)$$

Potensial awal dengan U_0 pangkat 6 dapat dilihat pada Gambar 10 yang di variasikan dengan λ, A .



Gambar 10. untuk U_0 pangkat 6 = $\frac{1}{2} \lambda x^6$
 $\lambda = A + \mu t, A = 0, \mu = 0.01$ dan $u = \frac{1}{2} \lambda x^6$

Jika disubstitusikan persamaan (24) ke persamaan (25) dan menambahkan U_1 maka didapatkan:

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda(t))}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left((3 \lambda(t) x^5 + \frac{\partial u_1}{\partial x}) \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (26)$$

Menyelesaikan persamaan (26) yaitu hasil dari persamaan itu turunannya dikalikan dengan $\dot{\lambda}$ sehingga didapatkan hasil:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{1}{3\lambda(t)} - \frac{\beta x^6}{2} \right) \rho \cdot \dot{\lambda} \quad (27)$$

Selanjutnya, menyelesaikan persamaan yang ada di sebelah kanan pada persamaan (25) sehingga didapatkan hasil yang telah dimasukan dengan $\dot{\lambda}$ menjadi :

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x} 3\lambda(t) x^5 + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (28)$$

Kemudian dilakukan substitusi hasil yang diperoleh pada persamaan (27) dan (28) ke persamaan (25) dengan mengotak atik suku kiri dan kanan sehingga mendapatkan hasil sebagaimana persamaan (29).

$$U_1 = \frac{\dot{\lambda}\gamma}{12\lambda(t)} \cdot X^2 \quad (29)$$

dengan memisalkan $U_1 = Ax^2$ didapatkan U_1 untuk orde pangkat 6 yaitu:

$$U_1 = \frac{\dot{\lambda}\gamma x^2}{12\lambda(t)} \quad (30)$$

Penelitian ini menemukan potensial tambahan dan persamaan umum potensial tambahan gerak Brown yang teredam sempurna. Potensial tambahan ini dapat mempercepat gerak Brown ketika mencapai kesetimbangan, yang memerlukan waktu yang lama untuk kembali ke keadaan setimbang. Dengan menambahkan potensial tambahan ini, sifat dan karakteristik partikel tidak akan berubah (Del Campo & Kim, 2019). Penelitian ini juga merupakan pengembangan dari penelitian terdahulu dengan menggunakan metode *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) sebagai bentuk penyelesaiannya (Ainayah et al., 2023). Oleh karena itu, hasil penelitian ini efektif merumuskan potensial tambahan dan persamaan umum potensial tambahan gerak Brown yang teredam sempurna.

SIMPULAN

Penelitian yang telah dilakukan dengan menggunakan metode *Fast Forward*, diaplikasikan dengan persamaan Fokker-Planck pada gerak Brown teredam sempurna (*overdamped*). Diperoleh suatu metode berupa potensial tambahan untuk setiap potensial awal yang berbentuk potensial harmonik dengan pangkat yang beragam untuk mempercepat gerak Brown yang teredam berlebihan mencapai titik kesetimbangan. Semula bergerak acak tanpa henti dan butuh waktu yang sangat lama agar kembali dalam keadaan setimbang tanpa mengubah sifat dan karakteristik partikel. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh hasil yaitu, jika potensial awal sistem adalah ($U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^4$) didapatkan potensial tambahan $U_1 = \frac{\dot{\lambda}\gamma}{8\lambda(t)} x^2$ dan jika potensial awal ($U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^6$) maka potensial tambahannya $U_1 = \frac{\dot{\lambda}\gamma}{12\lambda(t)} x^2$. Oleh karena itu, diperoleh hasil penelitian yang efektif merumuskan potensial tambahan dan persamaan umum potensial tambahan gerak Brown yang teredam sempurna.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Program Studi Pendidikan Fisika di FKIP Universitas Bengkulu yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengikuti kegiatan Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM) Penelitian, yang salah satu luarannya adalah artikel ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada orang tua, dosen-dosen pendidikan fisika, dan teman-teman seperjuangan yang telah memberikan dukungan terhadap penulis.

DAFTAR PUSTAKA

- Ainayah, N., Setiawan, I., & Hamdani, D. (2023). Methods to Accelerate Equilibrium in Overdamped Brownian Motion. *Jurnal Pendidikan Fisika dan Keilmuan (JPFK)*, 8(2), 212-225.
- Apriana, & Rosyid, M. F. (2018). Perumusan Gerak Stokastik Benda Tegar dalam Ruang Konfigurasi SE(3). *BIMIPA*, 28(1), 9–16.
- Apriza, B. (2019). Model Pembelajaran *Think Pair Share* Berbasis Literasi di Sekolah

- Dasar. *Prosiding Seminar Nasional Pagelaran*, 1(1), 216–223. <http://www.seminar.uad.ac.id/index.php/ppdn/article/view/1432>
- Benggadinda, A., & Setiawan, I. (2021). Metoda *Fast Forward* untuk Mempercepat Dinamika Kuantum Adiabatik pada Spin Tunggal. *JST (Jurnal Sains dan Teknologi)*, 10(2), 274–280. <https://doi.org/10.23887/jstundiksha.v10i2.39876>
- Del Campo, A., & Kim, K. (2019). Focus on Shortcuts to Adiabaticity. *New Journal of Physics*, 21(5). <https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab1437>
- Elisa, N., Setiawan, I., & Hamdani, D. (2023). Energi Penggerak untuk Mempercepat Kesetimbangan Gerak Brown Teredam Sebagian (Underdamped). *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika*, 10(1), 21–33.
- Frank, T. D. (2005). Delay Fokker-Planck Equations, Perturbation Theory, and Data Analysis for Nonlinear Stochastic Systems with Time Delays. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 71(3), 1–14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.031106>
- Hutagalung, M. (2023). Kajian Literatur Fase Adiabatik untuk mempercepat Dinamika Kuantum Adiabatik pada Osilator Harmonik. *Indonesian Journal of Applied Physics*, 13(1), 106–116. <https://doi.org/DOI:https://doi.org/10.13057/ijap.v13i1.65252>
- Khadem, S. M. J., Klages, R., & Klapp, S. H. L. (2022). Stochastic Thermodynamics of Fractional Brownian Motion. *Physical Review Research*, 4(4), 1-14, <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.043186>
- Martínez, I. A., Petrosyan, A., Guéry-Odelin, D., Trizac, E., & Ciliberto, S. (2016). Engineered swift equilibration of a Brownian particle. *Nature Physics*, 12(9), 843–846. <https://doi.org/10.1038/nphys3758>
- Najmudin, I. (2018). Studi Proses Gerak Brown Relativistik dengan Pendekatan Hanggi-Klimontovich. *Skripsi*, UIN Malang. <http://etheses.uin-malang.ac.id/id/eprint/12009>
- Nakamura, K., Matrasulov, J., & Izumida, Y. (2020). Fast-Forward Approach to Stochastic Heat Engine. *Physical Review E*, 102(1), 1–12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.012129>
- Palupi, D. S. (2010). Persamaan Fokker Planck dan Aplikasinya dalam Astrofisika. *Berkala Fisika*, 13(2), A1-A6–A6. https://ejournal.undip.ac.id/index.php/berkala_fisika/article/view/2995/2679
- Pradana, I. A. (2018). Analisa Mikrotremor Menggunakan Metode Random Decrement untuk Mikrozonasi Potensi Kerusakan Akibat Gempabumi di Kabupaten Pacitan. *Thesis*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Romadani, A., & Rosyid, M. F. (2022). Proses difusi relativistik melalui persamaan langevin dan fokker-planck. *Jurnal Teknosains*, 11(2), 101-111. <https://doi.org/10.22146/teknosains.63229>
- Seifert, U. (2012). Stochastic Thermodynamics, Fluctuation Theorems and Molecular Machines. *Reports on Progress in Physics*, 75(12). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/12/126001>
- Setiawan, I., Gunara, B.E., Masuda, S., & Nakamura, K. (2017). Fast Forward of The Adiabatic Spin Dynamics of Entangled States. *Physical Review A*, 96.
- Sugihakim, R., Setiawan, I., & Gunara, B. E. (2021). Fast-Forward of Local-Phased-Regularized Spinor in Massless 2+1-Dimensions Adiabatic Dirac Dynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1951(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1951/1/012068>
- Takahashi, K. (2014). Fast-Forward Scaling in a Finite-Dimensional Hilbert Space. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 89(4), 1–7.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.042113>

Tsekov, R. (2010). Brownian Motion of Molecules: the Classical Theory. *Ann. Univ. Sofia, Fac. Chem.* 88 (1), 57-66. <http://arxiv.org/abs/1005.1490>

Yang, Y. J., & Qian, H. (2020). Unified Formalism for Entropy Production and Fluctuation Relations. *Physical Review E*, 101(2), 1–16. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.022129>